

Determinant

Faraz qilaylik, $\{a_{ij} : i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}, n \in N\}$ to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari bo'lgan a_{ij} ifodalar ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

2.1.1-ta'rif. Yuqorida berilgan to'planning har bir elementini *birinchi tartibli determinant* deb ataymiz va uning qiymati sifatida shu elementning o'zini qabul qilamiz ([4] §16).

Endi, $(n-1)$ – tartibli determinant tushunchasi aniqlangan degan faraz asosida n -tartibli determinantni ($2 \leq n \in N$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

kabi belgilab, uning qiymatini aniqlash maqsadida quyidagi yordamchi tushunchalarni kiritamiz.

1) Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ni (2.1.1) *determinantning i-satri* (*i-satr – vektori*);

2) tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

ni j -ustuni (j -ustun – vektori);

3) $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ni esa *diagonali* (*bosh diagonali*) deb ataymiz.

2.1.2-ta'rif. $2 \leq n \in N$ bo'lganda (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} ($i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}$) elementining $(n-1)$ - tartibli *minori* (*minori*) deb, mazkur element joylashgan determinantning i -satri va j -ustunini o'chirish natijasida hosil qilingan $(n-1)$ - tartibli determinantni ataymiz hamda M_{ij} kabi belgilaymiz.

Bu ta'rifdan ko'rinadikki, n - tartibli determinantda n^2 ta $(n-1)$ - tartibli minorlar mavjud bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, ularning barchasi aniqlangandir.

2.1.3- ta'rif. (2.1.1) n - tartibli determinant a_{ij} elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ni ataymiz va A_{ij} bilan belgilaymiz.

Demak, bu ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}). \quad (2.1.2)$$

2.1.4-ta'rif. n -tartibli determinantning qiymati deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (2.1.3)$$

ni qabul qilamiz ([4] §16).

(2.1.3) ning o'ng tomonini *determinantning birinchi satri bo'yicha yoyilmasi* deb yuritiladi.

2.1.1. Ikkinchi tartibli determinant

Agar (2.1.3) da $n=2$ deb olsak, 2.1.1-ta'rif bilan birinchi tartibli determinant tushunchasi aniqlanganligi sababli, (2.1.2) yordamida

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^2 a_{1j} A_{1j} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (2.1.4)$$

ni olamiz.

Ikkinchi tartibli determinantda (a_{11}, a_{22}) *diagonal* bilan bir qatorda (a_{12}, a_{21}) ni *yordamchi diagonal* deb yuritiladi.

(2.1.4) dan ikkinchi tartibli determinant qiymati *diagonal elementlari ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish natijasiga tengligini ko'ramiz*.

1-misol. $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - (-2) \cdot 5 = -6 + 10 = 4.$

2-misol.

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

3-misol. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 \cdot (-1) = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

4-misol.

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha = \rho (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho.$$

2.1.2. Uchinchi tartibli determinant

$n=3$ bo'lganda, ikkinchi tartibli determinant (2.1.4) bilan aniqlanganligini hisobga olib, (2.1.3) dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

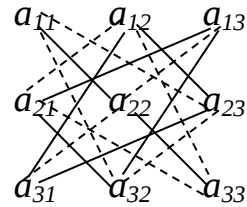
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \quad (2.1.5)$$

ni olish qiyin emas. Bu uchinchi tartibli determinantni hisoblashning asosiy formulasi bo'lib, uning o'ng tomonidagi ifodani hosil qilishda (2.1.3) bilan bir qatorda *uchburchaklar* hamda *Sarius qoidasi* deb ataluvchi usullar mavjuddir.

1. *Uchburchaklar qoidasi*. Asosi uchinchi tartibli determinant diagonaliga parallel uchlari esa determinant elementlari joylashgan nuqtalarda bo'lgan teng yonli uchburchaklar chizamiz (tasavvurimizda). Diagonalda joylashgan va aytilgan uchburchaklar uchlarida joylashgan 3 tadan elementlarni ko'paytirib, (2.1.5) ning o'ng tomonidagi ifodaning dastlabki 3 ta hadini, xuddi shunday ishni (a_{13}, a_{22}, a_{31}) yordamchi diagonal uchun ham takrorlab, olingan ko'paytmalarni qarama-qarshi ishoralar bilan olib, so'nggi 3 ta hadini hosil qilamiz (2.1.1-rasm).

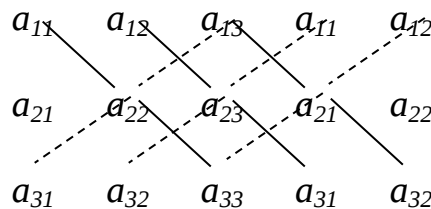
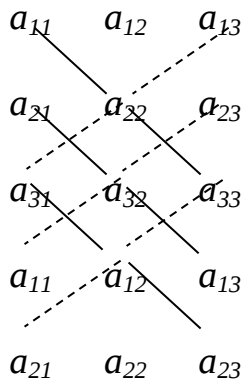
5-misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - \\ - 2 \cdot (-4) \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 = \\ = 8 - 2 + 0 - 0 - 3 - 2 = 1.$$



2.1.1-rasm.

2. *Sarius qoidasi*. Bu usulda uchinchi tartibli determinantning birinchi va ikkinchi satrlarini uning davomiga mos ravishda to'rtinchi va beshinchi satrlar qilib yozib, determinant diagonaliga parallel uchtdan elementlar orqali o'tuvchi yana ikkita diagonallar o'tkazamiz. Ularga joylashgan uchtdan elementlarni ko'paytirib (2.1.5) ning birinchi uchta hadini va bu ishni yordamchi diagonal uchun ham bajarib olingan ko'paytmalar ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib, so'ngi uchta hadini olamiz. Huddi shunga o'xshash ishni determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda to'rtinchi va beshinchi ustunlar qilib yozish bilan ham bajarish mumkin (2.1.2-rasm).



2.1.2-rasm.

2.2. Determinantning xossalari

2.2.1-teorema. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ bo'lganda (2.1.1) n -tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad i = \overline{1; n} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad j = \overline{1; n} \quad (2.2.1)$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda D_n - (2.1.1) n -tartibli determinantning qiymati, A_{ij} esa a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisidir.

Isbot. (2.2.1) ning birinchi munosabati $i=1$ bo'lgan hol uchun to'g'ri ekanligi n -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi. Qolganlarini matematik induksiya usuli bilan ko'rsatamiz. Avvalo, (2.2.1) ning birinchi munosabati (2.1.1) n -tartibli *determinantning i-satri bo'yicha*, ikkinchisi esa *j-ustuni bo'yicha yoyilmasi* deb atalishini aytamiz.

$n=2$ uchun (2.2.1) o'rinli ekanligini ko'rsatish osondir. Masalan, ikkinchi ustun bo'yicha yoyilmani olsak,

$$\sum_{i=1}^2 a_{i2} A_{i2} = -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = D_2.$$

Qolganlari ham xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

Endi, (2.2.1) $n-1$ uchun to'g'ri deb uni n uchun ham to'g'ri bo'lishini ko'rsataylik. Yuqorida aytganimizdek,

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = D_n$$

ekanligi n -tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi.

$n \geq 3$ bo'lganda yordamchi $(n-2)$ -tartibli minor tushchasini kiritamiz. (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} va a_{mk} ($i \neq m$, $j \neq k$) elementlariga mos $(n-2)$ -tartibli minor deb determinantning i - va m -satrlarini hamda j - va k -ustunlarini o'chirishdan hosil qilingan $(n-2)$ -tartibli determinantga aytamiz va M_{ijmk} kabi belgilaymiz ($M_{ijmk} = M_{mkij}$ ekanligi ravshandir).

Endi, i -satr bo'yicha determinant yoyilmasini qaraylik:

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} M_{ij}$$

Bu yerda M_{ij} (2.1.1) n -tartibli determinant a_{ij} elementining $(n-1)$ -tartibli minori ekanligidan, u $(n-1)$ -tartibli determinant bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, uning uchun (2.2.1) munosabatlar o'rinlidir. $2 \leq i \leq n$ bo'lganda M_{ij} ning birinchi satri bo'yicha yoyilmasi

$$M_{ij} = \sum_{j \neq k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k}$$

bo'lib, bu yerda $\sigma = \sigma_0(j-k)$, $\sigma_0(x)$ esa Hevisaydning birlik funksiyasidir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{j \neq k=1}^n (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k} = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \sum_{k \neq j=1}^n (-1)^{i+j+\sigma-1} \cdot a_{ij} M_{ij1k} = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = S_1 = D_n, \end{aligned}$$

ya'ni $S_i = D_n$, $i = \overline{2; n}$ ni olamiz. Bu satrlar bo'yicha yoyilmalar uchun (2.2.1) ning isbotidir.

Ustun bo'yicha yoyilmani olsak, $j = \overline{2; n}$ bo'lganda, xuddi yuqoridagiga o'xshash,

$$U_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = U_1 = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin (buni o'quvchining o'ziga qoldiramiz).

Endi, $U_1 = S_1$ ekanligini ko'rsatish kifoyadir.

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \\ &= a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} M_{i1j} = \\ &= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^n (-1)^i a_{i1} M_{i1j} = \\ &= a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = S_1. \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

(2.2.1) yordamida (2.1.1) n -tartibli determinantning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin.

1⁰. Determinantning barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozish (determinantni transponirlash) uning qiymatini o'zgartirmaydi.

2⁰. $2 \leq n \in N$ bo'lganda determinantning ikkita satrlarining (ustunlarining) o'rinlari o'zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

3⁰. $2 \leq n \in N$ bo'lganda ikkita bir xil satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

4⁰. Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

5⁰. Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari bir xil ko'paytuvchiga ega bo'lsa, bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin, va aksincha, determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlarini shu songa ko'paytirish kifoyadir.

6⁰. Proportsional satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

7⁰. Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi yig'indidan iborat bo'lsa, u mos satrining (ustunining) elementi berilgan determinantdagi mos satr (ustun) elementining mos qo'shiluvchisidan, qolgan satrlari (ustunlari) esa berilgan determinant mos satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo'lgan determinantlarning yig'indisiga tengdir. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8⁰. Determinant biror satri (ustuni) elementlari boshqa satrlar (ustunlar) mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u nolga tengdir.

9⁰. Determinant biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun) mos elementlarini bitta songa ko'paytirib qo'shilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

1⁰ xossani matematik induksiya usulini qo'llab va (2.2.1) dan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham, $n=2$ uchun uning o'rinli ekanligiga bevosita (2.1.4) formuladan foydalanib ishonch hosil qilish osondir. Endi, $(n-1)$ -tartibli determinant uchun bu xossa o'rinli deb faraz qilib, uni n -tartibli determinant uchun isbotlaylik. Agar

qiymati D_n dan iborat berilgan (2.1.1) n -tartibli determinant barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozishdan hosil qilingan determinantni berilganga *transponirlangan* deb atab, uning qiymatini D_n^* bilan belgilasak, uning birinchi satri bo'yicha yoyilmasidan foydalanib,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = D_n$$

ni olamiz (M_{ij}^* orqali M_{ij} ning transponirlangani belgilangan bo'lib, qilingan farazga ko'ra ular uchun $M_{ij}^* = M_{ij}$ dir).

2^o xossa ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. Buning uchun $n=2$ bo'lganda bevosita (2.1.4) dan foydalanish, $n \geq 3$ bo'lganda esa determinantning o'z o'rnida qolgan satri (ustuni) bo'yicha (2.2.1) yoyilmasini yozish kifoyadir.

3^o xossa 2^o ning natijasi sifatida kelib chiqadi.

4^o va 5^o xossa unda qayd qilingan satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanib isbotlanadi.

6^o xossa 5^o va 3^o larning natijasi sifatida kelib chiqadi.

7^o xossani ko'rsatish uchun elementlari yig'indilardan iborat satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanish kerak bo'ladi.

8^o va 9^o xossalar 7^o va 6^o larning natijasidir.

Bulardan tashqari determinantning yana bitta xossasini isbotsiz keltiramiz.

10^o. n -tartibli A va B determinantlarning elementlari vositasida elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ki} \quad (i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{1; n})$$

formulalardan biri yordamida hisoblangan C determinant uchun

$$C = A \cdot B$$

o'rinlidir. Bu yerda a_{ij} A , b_{ij} B , c_{ij} esa C determinantlarning i -satri va j -ustuni elementidir ([4] §13).

5-misol.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Yechish. Uchinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, birinchi ustun mos elementlariga, so'ngra -3 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustun mos elementlarga qo'shsak, 9^o xossaga ko'ra

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-80 - 30 + 18 + 120 - 10 + 36) = -54.$$

2.2.2-teorema. $2 \leq n \in N$ bo'lganda n -tartibli determinant uchun

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} &= \delta_{ik} D_n & (i = \overline{1;n}, k = \overline{1;n}) \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} &= \delta_{jk} D_n & (j = \overline{1;n}, k = \overline{1;n})\end{aligned}\quad (2.2.2)$$

munosabatlar o‘rinlidir. Bu yerda δ_{pq} -Kroneker belgisi deb atalib, $p \in N, q \in N$ bo‘lganda

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$

kabi aniqlanadi.

Isbot. (2.2.2) ning birinchi munosabatida $i=k$, ikkinchisida esa $j=k$ bo‘lgan hollarning isboti 2.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, birinchi munosabatda $i \neq k$ va ikkinchisida esa $j \neq k$ deb faraz qilsak, ularning o‘ng tomonlari noldan iborat bo‘ladi. Chap tomonidagi ifoda esa (2.2.1) lar asosida birinchi munosabatda bir xil i - va k -satrlari, ikkinchisida esa bir xil j - va k -ustunlari mavjud bo‘lgan determinantlar sifatida nolga tengdir. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

Determinant biror satri (ustuni) elementlarini algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisi determinant qiymatiga, boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisi esa nolga tengdir.